管理类联考数学：代数基础知识 2

因式分解

因式分解的概念：把一个多项式化为几个整式的积的形式，称为把这个多项式因式分解，也称为把这个多项式分解因式。一个多项式中每一项都含有的因式称为这个多项式的公因式。如$x^3+ax^2+bx=x(x^2+ax+b)$。

（1）因式分解的实质是一种恒等变形，是一种化和为积的变形。

（2）因式分解与整式乘法是互逆的

（3）在因式分解的结果中，每个因式都必须是整式。

（4）因式分解要分解到不能再分解为止。

因式分解的常用方法：

1.提公因式法：如 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$，但公因式有时也会是一个多项式，需要多观察。

2.运用公式法：

①平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

②完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

③立方和与立方差公式：$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

④三元平方和公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

⑤完全立方和公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

⑥$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=2[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac]$.

3.十字相乘法：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

4.分组分解法：分组后能提公因式；分组后能运用公式法。

因式分解的一般步骤：

（1）若多项式的各项有公因式，则先提公因式；

（2）观察多项式的次数，如果是二次，则考虑完全平方公式或平方差公式；如果是三次，则考虑立方和与立方差公式；如果是四次及以上，考虑分组分解法。

（3）分解因式分解到不能再分解为止。

【真题剖析】

例：已知$x^2+y^2=9$，$xy=4$，则$\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}$=（　）。

A.$\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{5}$　C. $\frac{1}{6}$　D. $\frac{1}{13}$　E. $\frac{1}{14}$

【解析】C。本题考查的是式子化简求值的问题，这类题先观察，利用公式化简，最后代入已知条件求值。$x^3+y^3+x+y=(x+y)(x^2-xy+y^2)+x+y=(x+y)(x^2-xy+y^2+1)$，因此$\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}=\frac{x+y}{(x+y)(x^2-xy+y^2+1)}=\frac{1}{x^2-xy+y^2+1}$，则代入已知条件得：$\frac{1}{x^2-xy+y^2+1}=\frac{1}{9-4+1}=\frac{1}{6}$。

例：已知 $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\dots+\frac{1}{(x+9)(x+10)}$，则 $f(8)=$（　　）。

A.$\frac{1}{9}$　B. $\frac{1}{10}$　C. $\frac{1}{16}$　D. $\frac{1}{17}$　E. $\frac{1}{18}$

【解析】E。本题考查的是裂项法求值，裂项法对于分母乘积形式的复杂式子有很好的简便作用，需要记住常见的裂项公式，$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，本题中 $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\dots+\frac{1}{(x+9)(x+10)}=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+2)}+\frac{1}{(x+2)}-\frac{1}{(x+3)}+\dots+\frac{1}{(x+9)}-\frac{1}{(x+10)}=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+10)}$，代入 $x=8$，得 $f(8)=\frac{1}{18}$。