一、常用计算公式

1. 乘法公式与因式分解

（1）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$。
（2）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$。
（3）$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
（4）$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.
（5）$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

2.指数

（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.
（2）$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$。
（3）$(a^m)^n=a^{mn}$.
（4）$(ab)^m=a^mb^m$.
（5）$(\frac{a}{b})^m=\frac{a^m}{b^m}$.
（6）$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

3.对数

如果$a>0$ 且$a\neq 1$，M，$N>0$，则：
（1） $loga^{(MN)}=loga^M+loga^N$;
（2）$loga^{\frac{M}{N}}=loga^M-loga^N$
（3）$loga^{N^n}=nloga^N$
（4）$loga^{\sqrt[n]{N}}=\frac{1}{n}loga^N$
（5）$logb^N=\frac{loga^N}{loga^b}$（换底公式）
（6）对数恒等式$N=a^{loga^N}$，更常用$N=e^{lnN}$。
（7）$loga^1=0$; $loga^a=1$;

4.排列组合与二项式定理

（1）排列$P_n^m=n(n-1)\cdot(n-2)\dots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$
（2）全排列数：$P_n^n=n(n-1)\cdot(n-2)\dots\cdot 2\cdot 1=n!$（$n!$称为$n$的阶乘）
（3）组合：$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdot(n-2)\dots(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$
（4）组合的性质：$C_n^m=C_n^{n-m}=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$。$C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)\cdot(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}$。
（5）二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\dots+C_n^ra^{n-r}b^r+\dots+C_n^nb^n(n\in N^+)$
（6）二项式定理的推论：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\dots+C_n^n=2^n$。

5.独立事件重复性的概率

若独立重复性事件的概率为 p，则 n 次试验中该事件发生 k 次的概率为$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}(k=0,1,2,\dots n)$，其中$q=1-p$.

二、绝对值

1. 非负性：$|a|\geq 0$，任何实数a的绝对值非负。
   （1）平方数（或偶次乘方），如a^2，a^4，
   （2）开偶次根号$\sqrt{a}$，$\sqrt[4]{a}$.
   考点：若干个具有非负性质的数之和等于零，则每个非负数必然为零。
2. 三角不等式：$|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$
   左边等号成立的条件：$ab\leq 0$且$|a|\geq|b|$。
   右边等号成立的条件：$ab\geq 0$。

三、比例

1. 增长率与下降率

增长率 p%，原值 a，现值$a\times(1+p\%)$。

下降率 p%，原值 a，现值$a\times(1-p\%)$。

2.合分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}(a>b,c>d)\leftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

3.等比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}(b+d+f\neq0)$。

4.增减性：$\frac{a}{b}>1$，$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}(m>0)$；$0<\frac{a}{b}<1$，$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}(m>0)$。

四、平均值

1. $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时，等号成立。

2. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq2.(ab>0)$

3. $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}(a>0,b>0)$

4. 若 n 个正数的算术平均值与几何平均值相等，则这 n 个正数相等，且等于算术平均值。

五、函数

1. 二次函数标准式：$y=ax^2+bx+c$（其中a，b，c是常数，$a\neq0$）

2. 配方法：$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，当$x=-\frac{b}{2a}$时，$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$为最值，即（$-\frac{b}{2a}$，$\frac{4ac-b^2}{4a}$）为顶点。

3. 定性分析：一元二次函数$y=ax^2+bx+c$（其中a，b，c是常数，$a\neq0$）的对称轴为$x=-\frac{b}{2a}$，最值为$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

（1）$a>0$，抛物线开口向上，有最小值；$a<0$，抛物线开口向下，有最大值。（a 决定开口上下）

（2）若$-\frac{b}{2a}>0$，对称轴在 y 轴右边；若$-\frac{b}{2a}<0$，对称轴在 y 轴左边，（a,b 决定左右）

（3）若$c>0$，函数与 y 轴的交点在原点上方；若$c<0$，函数与 y 轴的交点在原点下方。（c 微调原点）

六、方程

1．判别式：$ax^2+bx+c=0$的解常用$\Delta=b^2-4ac$来判别：

（1）$\Delta>0$，方程有两个不相等的实数根，x_1，$x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$;

（2）$\Delta=0$，方程有两个相等的实数根，x_1，$x_2=\frac{-b}{2a}$;

（3）$\Delta<0$，方程有无实数根。

2.韦达定理：一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根分别是x_1，x_2。其中a，b，c分别叫作二次项系数、一次项系数和常数项。

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$$

七、不等式

1. 一元二次不等式

（1） $ax^2+bx+c>0$恒成立，则有$\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$或$\begin{cases}a=b=0\\ c>0\end{cases}$

（2） $ax^2+bx+c<0$恒成立，则有$\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$或$\begin{cases}a=b=0\\ c<0\end{cases}$

2. 均值不等式

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}(x>0,y>0)$$

八、数列

1. S_n与a_n的关系

（1）$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq2)\end{cases}$

（2）$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$。

2. 等差数列

（1） $a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$

（2） $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

（3） $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$.

（4） 性质：S_n为等差数列前 n 项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，...仍为等差数列。

3.等比数列

（1）$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$

（2）$q=\sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$.

（3）前 n 项和：$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}$

（4）性质：S_n为等比数列前 n 项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…仍为等比数列。

4.求和公式

求数列的前n项和的方法：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

（1）公式法：

①等差数列的前n项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

②等比数列的前n项和公式：$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq)}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}$

（2）分组求和法：把一个数列分成几个可以直接求和的数列，常用于等比数列加等差数列中。

（3）裂项相消法：把一个数列的通项分成两项差的形式，相加过程中消去中间项，剩下有限项再求和。常出现的形式为分式，且分母出现乘积。

常见的裂项公式有：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$；$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

（4）错位相减法：适用于一个等差数列和一个等比数列对应项相乘构成的数列求和。

（5）常见数列的前n项和：

①$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}$

②$2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$

③$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

④$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

⑤$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

九、平面几何与立体几何

1.图形面积

（1）三角形面积：$S=\frac{ah}{2}=\frac{1}{2}absinC=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{1}{2}acsinB=\frac{1}{2}\times$周长$\times$内切圆半径.

（2）矩形面积：$S=ab$

（3）梯形面积：$S=\frac{1}{2}$（上底＋下底）×高

（4）扇形面积：$S=\frac{\theta}{360°}\pi r^2$($\theta$为扇形夹角)

2.正方体和长方体

（1）长方体

设三条相邻的棱长分别是a，b，c，则

表面积：$S=2(ab+bc+ca)$.

体积：$V=abc$

体对角线：$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

所有棱长和：$l=4(a+b+c)$

（2）正方体

正方体是特殊的长方体，此时a=b=c，那么

表面积：$S=6a^2$

体积：$V=a^3$

体对角线：$d=\sqrt{3}a$

所有棱长和：$l=12a$

3.旋转体

（1）圆柱

设高为h，底面半径为r，则

侧面积：$S_{侧}=2\pi rh$.（侧面展开图是一个长方形，长为底面圆的周长，宽为圆柱的高）

表面积：$S=S_{侧}+2S_{底}=2\pi rh+2\pi r^2$.

体积：$V=$底面积$\times$高$=\pi r^2h$.

（2）球

设球半径为r，则

表面积：$S=4\pi r^2$.

体积：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

【注意】用一个平面去截一个球，截面是圆；球心和截面圆心的连线垂直于截面；球心到截面的距离为d，球的半径为R，截面圆的半径为r，则：$R^2=r^2+d^2$.

考点：球体与柱体的关系：

正方体外接球：球的直径等于正方体的体对角线，

即$r_{外}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$。

正方体内切球：球的直径等于正方体的棱长，即$r_{内}=\frac{1}{2}a$.

十、平面解析几何——直线

1. 两点间的距离公式：

在平面直角坐标系中，点A(x_1, y_1)和点B(x_2, y_2)之间的距离为：

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2. 中点坐标公式：

在平面直角坐标系中，点A(x_1, y_1)和点B(x_2, y_2)两点的中点坐标为：

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

3. 过两点的直线斜率公式：

设直线l上有两个点A(x_1, y_1)和B(x_2, y_2)，则直线l的斜率为：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$$

4.直线的五种方程

（1）点斜式（局限性：不含垂直于x轴的直线）

过点P(x_0, y_0)，斜率为k的直线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$.

（2）斜截式（局限性：不含垂直于x轴的直线）

斜率为k，在y轴上的截距为b的直线方程为$y=kx+b$。

（3）两点式（局限性：不含垂直于坐标轴的直线）

过两个点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的直线方程为$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_1\neq y_2, x_1\neq x_2)$

（4）截距式（局限性：不含垂直于坐标轴和过原点的直线）

在x轴上的截距为a，在y轴上的截距为b的直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

【注意】在x轴上的截距为a，表示直线过点（a，0），在y轴上的截距为b，表示直线过点（0，b）。

（5）一般式

$Ax+By+C=0$，A，B 不同时为零。若$B\neq 0$，则有斜率$k=-\frac{A}{B}$。

【注意】一般式中，特殊地，当$A=0$时，直线斜率是 0，是一条水平直线；当$B=0$时，直线斜率不存在，直线是一条竖直直线。

5. 点到直线的距离：

点A(x_0, y_0)到直线$Ax+By+C=0$的距离为$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

6.两条直线的位置关系

位置关系	斜截式 $l_1: y=k_1x+b_1$ $l_2: y=k_2x+b_2$	一般式 $l_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ $l_2: a_2x+b_2y+c_2=0$
平行$l_1 \parallel l_2$	$k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
相交	$k_1\neq k_2$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
垂直$l_1\perp l_2$ **（相交的特殊情况）**	$k_1k_2=-1$	$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=-1$或$a_1a_2+b_1b_2=0$

7. 两平行直线的距离：

直线$ax+by+c_1=0$与直线$ax+by+c_2=0$的距离$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

8.直线的对称关系

点关于点对称：

（1）点$P(a, b)$关于原点的对称点坐标是$(-a, -b)$；

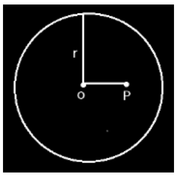
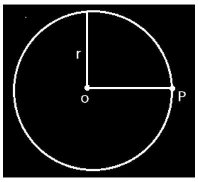
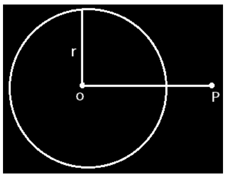
（2）点$P(a, b)$关于某一点$M(x_0, y_0)$的对称点坐标，利用中点坐标公式得：$(2x_0-a, 2y_0-b)$。

点关于直线对称：

（1）点$P(a, b)$关于x轴，y轴，直线$x=y, x=-y$的对称点坐标可利用图像求得，分别是$(a, -b)$，$(-a, b)$，(b, a)，$(-b, -a)$

点$P(a, b)$关于直线$l: Ax+By+C=0$的对称点P'的求法有 3 种方法：

方法一：由$PP'\perp l$知，$k_{PP'}=\frac{B}{A}$，因而直线PP'的方程为$y-b=\frac{B}{A}(x-a)$，由

	图形	成立条件（几何表示）	成立条件（代数表示）
在圆内		$\lvert OP\rvert < r$	$(a-x_0)^2+(b-y_0)^2<r^2$
在圆上		$\lvert OP\rvert = r$	$(a-x_0)^2+(b-y_0)^2=r^2$
在圆外		$\lvert OP\rvert > r$	$(a-x_0)^2+(b-y_0)^2>r^2$

$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ y-b=\frac{B}{A}(x-a) \end{cases}$可求得交点坐标（$PP'$的中点），再由中点坐标公式求得对称点$P'$的坐标。

方法二：设对称点$P'(x_0，y_0)$，由中点坐标公式求得中点坐标为$(\frac{a+x_0}{2}，\frac{b+y_0}{2})$，把中点坐标代入直线$l$方程中，得：$A\cdot\frac{a+x_0}{2}+B\cdot\frac{b+y_0}{2}+C=0$，再由$k_{PP'}=\frac{y_0-b}{x_0-a}=\frac{B}{A}$，联立可求得对称点$P'$的坐标。

方法三：设对称点$P'(x_0，y_0)$，利用点到直线的距离公式有：$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，再由$k_{PP'}=\frac{y_0-b}{x_0-a}=\frac{B}{A}$，联立可求得对称点$P'$的坐标。

十一、平面解析几何——圆

1. 圆的方程

   标准形式：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ ，其中圆心坐标为$(x_0，y_0)$，半径为r。

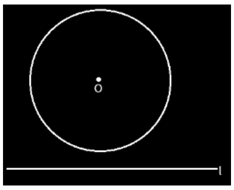
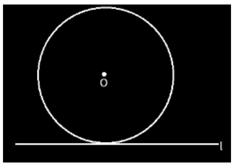
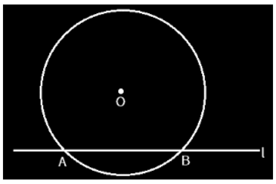
   一般形式：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，圆心坐标为$(-\frac{D}{2}，-\frac{E}{2})$，半径为$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$。

2. 点和圆的位置关系

点$P(a，b)$，圆 O 的方程是$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

3. 直线和圆的位置关系

设直线$l: y=kx+b$，圆 O 的方程是$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，d 为圆心(x_0, y_0)到直线l的距离，直线与圆有以下三种位置关系：

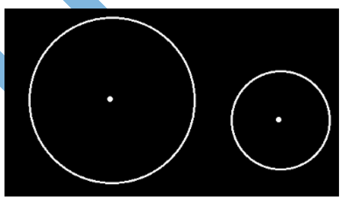
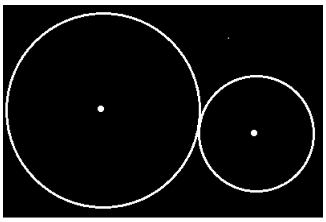
	图形	几何表示	成立条件（代数表示）
相离		$d>r$	联立方程组：$\begin{cases} y=kx+b \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases}$，$\Delta<0$，无实根
相切		$d=r$	联立方程组：$\begin{cases} y=kx+b \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases}$，$\Delta=0$，有两个相等实根
相交		$d<r$	联立方程组：$\begin{cases} y=kx+b \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases}$，$\Delta>0$，有两个不等实根

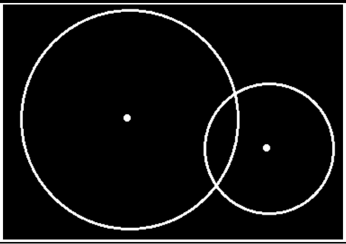
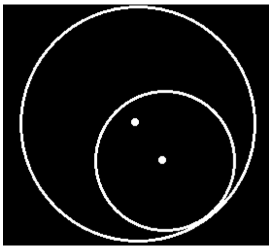
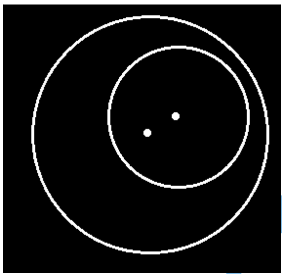
圆的弦长公式：$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|=\sqrt{(1+k^2)[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2]}$或$|AB|=\sqrt{1+k^2}|y_2-y_1|=\sqrt{(1+k^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$

还可建立直角三角形，利用勾股定理求弦长：$d^2+(\frac{|AB|}{2})^2=r^2$.

4. 圆与圆的位置关系

圆O_1的方程是$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2={r_1}^2$，圆$O_2$的方程是$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2={r_2}^2$，（假设$r_1>r_2$）。$d$为两圆的圆心距，即$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。则圆与圆有以下五种位置关系：

圆与圆的位置关系	图形	成立条件（几何表示）
外离（4 条公切线）		$d>r_1+r_2$
外切（3 条公切线）		$d=r_1+r_2$

相交（2 条公切线）		$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$
内切（1 条公切线）		$d = r_1 - r_2$
内含（0 条公切线）		$0 \le d < r_1 - r_2$

十二、数据描述

1.平均值

（1）算术平均值：有n个数x_1，x_2，…，x_n，称$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$为这个数的算术平均值。

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n\bar{x}$.

（3） 几何平均值：有n个数x_1，x_2，…，x_n，称$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$为这个数的几何平均值。

2.方差与标准差

（1）方差：$S^2 = \frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

（2）标准差：$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

十三、应用题

1.比例问题

增加的百分比=$\frac{末-首}{基准} \times 100\%$（若百分比为负，则意味着减少或负增长）。

2.销售问题

利润=售价-成本。

利润率=$\frac{售价-成本}{成本} \times 100\%$

3.行程问题

（1）基本公式：路程＝速度×时间。即$s = vt$.

（2）相对速度：同向：$v_{相对} = v_{甲} - v_{乙}$；反向：$v_{相对} = v_{甲} + v_{乙}$.

（3）水流速度：顺水：$v_{实际} = v_{静} + v_{水}$；逆水：$v_{实际} = v_{静} - v_{水}$.

4.工程问题

工作效率=$\frac{工作总量}{工作时间}$。

5.浓度问题

（1）浓度=$\frac{溶质}{溶液}\times 100\%$。

（2）混合问题：交叉法。对应写两边，总的写中间，交叉相减成比例。即$\frac{浓度较大的溶液量}{浓度较小的溶液量}=\frac{混合后的浓度-浓度较小值}{浓度较大值-混合后的浓度}$。

（3）稀释问题。V 升的酒精，不论原来浓度为多少，倒出 x 升后加水，稀释系数均为$\frac{V-x}{V}$.利用稀释系数：最后浓度=初始浓度×稀释系数 1×稀释系数 2=a%$\frac{V-x}{V}\cdot\frac{V-y}{V}$。